

机器学习：函数拟合(Functional Imitation)

Copyright: Jingmin Wei, Automation – Pattern Recognition and Intelligent System, School of Artificial Intelligence and Automation, Huazhong University of Science and Technology

Copyright: Jingmin Wei, Computer Science - Artificial Intelligence, Department of Computer Science, Viterbi School of Engineering, University of Southern California

机器学习：函数拟合(Functional Imitation)

1. 函数拟合
2. 多项式拟合

机器学习的回归问题，可以看做是函数拟合问题，这里我们给出函数拟合的定义和评判指标。

1. 函数拟合

假设给定了 n 个数据点: $(x_i, y_i), i = 1, 2 \dots n$ 。

希望找到一条直线 $y = f(x) = ax + b$ 使得拟合度最好。

$$\hat{y}_i = f(x_i) = y_i + \varepsilon_i$$

ε 为预测值和真实值之间的误差。可以定义一下关于误差的一些指标。

最大误差, $\varepsilon \triangleq (\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n)^T$

$$E_\infty(f) = \max_{1 \leq i \leq n} |\varepsilon_i| = \|\varepsilon\|_\infty$$

平均误差:

$$E_1(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\varepsilon_i| \propto \|\varepsilon\|_1$$

均方误差:

$$E_2(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i) \propto \|\varepsilon\|_2$$

均方根误差:

$$E_2(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i)^{\frac{1}{2}} \propto \|\varepsilon\|_2$$

$\min E_2(f)$, subject to $\varepsilon_i = y_i - f(x_i), \forall i$ 。在[Lesson 4 监督学习之回归\(Linear, NonLinear, Lasso, Ridge, Generalization\)](#)中我们将用到均方误差来求解线性回归问题。

2. 多项式拟合

给定 $(x_i, y_i), i = 0, 1 \dots n$ 。假设:

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) \\ &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \end{aligned}$$

确定 a_n^*, \dots, a_0^* , 使得多项式的拟合度最好。

$$\begin{aligned} (x_0, \dots, y_0) \quad y_0 &= a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_0 + \varepsilon_0 \\ (x_1, \dots, y_1) \quad y_1 &= a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_0 + \varepsilon_1 \\ &\vdots \\ (x_n, \dots, y_n) \quad y_n &= a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_0 + \varepsilon_n \end{aligned}$$

写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix} + \varepsilon = Ax + \varepsilon$$

在[Lesson 4 监督学习之回归\(Linear, NonLinear, Lasso, Ridge, Generalization\)](#)中我们将具体求解多项式回归问题。